HOCHSCHULE REGENSBURG

PRÜFUNGSTEILNEHMER
(bitte in Druckbuchstaben)

Prüfungsfach: LO

Name: **Sem.:**

Aufgabensteller: Prof. Dr. Hornung

Vorname:

Prüfungstermin: 02..02 2013
Arbeitszeit: 90 Minuten
Zugelassene Hilfsmittel: alles

Die Prüfung ist eine „Auswahlprüfung“ mit mehr als 100 Punkten. 100 Punkte entsprechen 100 %.

Es sind 7 Aufgaben auf 12 Seiten.

(Bitte möglichst auf das Aufgabenblatt schreiben (außer grafische Lösungen -> Extrablätter!)

Viel Erfolg !

Aufgabe 1: Lineare Optimierung (grafisch lösen!)

Es gibt die beiden köstlichen Speisen „Gedünstete Zucchini-Schiffchen“ und Malteser Zucchini-Topf mit Zutaten wie folgt

	Je Zucchini-Schiffchen	je Malteser-Topf	Vorräte
Zucchini	½	1	7 [Stück]
Tomaten	5	4	40 [Stück]
Paprika (rot)	-	1	5 [Stück]
GEWINN	2 €	3 €	-

Wieviele Zucchini-Schiffchen bzw. Maltesereintopf-Portionen muss man her- stellen, damit der Gesamtgewinn maximal ist und die Vorräte ausreichen?

a.) Löse die Aufgabe **grafisch!** **(6 P)**

b.) **Interpretiere** das Ergebnis! (3 P)

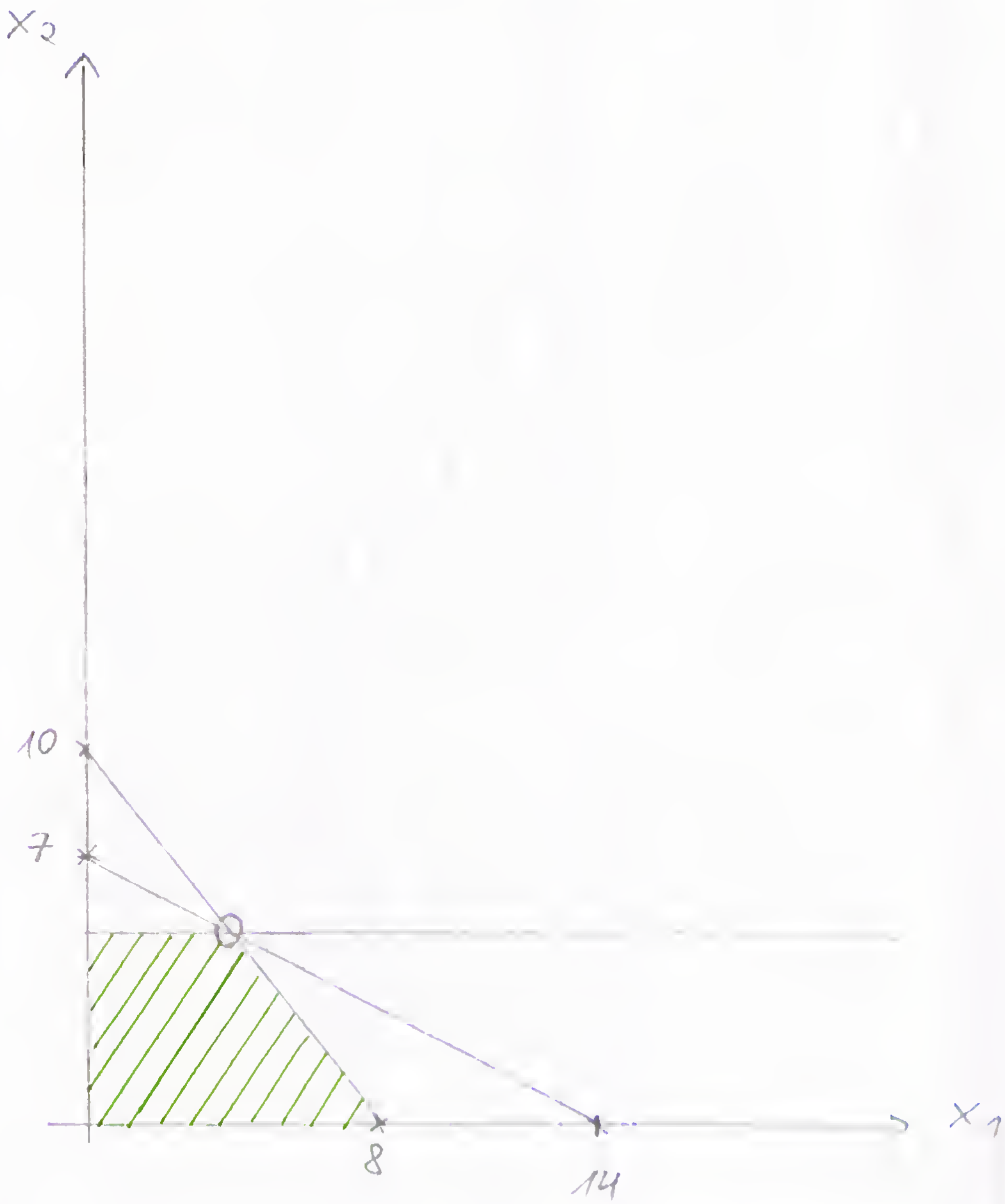
c.) Welche Lösung ergibt sich, wenn man keine Paprika verwendet? (3 P)

	Variante x_1	Variante x_2	Vorräte
Zucchini	1/2	1	7x
Tomaten	5	4	40x
Paprika	–	1	5x
G	2€	3€	

a) $\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 7 \longrightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 7;\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 14$

$5x_1 + 4x_2 \leq 40 \longrightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 10;\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$

$x_2 \leq 5 \longrightarrow x_2 = 5$



b) $x_1 = 4$ Zucchini

$x_2 = 5$ Malteser - Topf

$G = 4 \cdot 2€ + 5 \cdot 3€$
$= 23€$

Man kann aus diesen Vorräten
4 Portionen Zucchini- Schiffchen und
5 Portionen Malteser - Topf zubereiten.
Es sind alle Zutaten verbraucht.
Der Gewinn beträgt 23€

c) Wenn man Paprika weglässt, dann bleiben die Portionen gleich und der Gewinn auch!

Aufgabe 2 :

FRAGEN:

A.) Transportproblem

Nach elementarer Logik folgt doch beim einfachen klassischen Transport - problem, dass die Summe der Angebote a_i, $i = 1,2,\ldots n$, gleich sein muss der Summe der Nachfragen b_k, $k=1,2,\ldots m$

a.) Ist das auch eine mathematisch notwendige Bedingung? Beweis ! (6 P)

b.) Was könnte man tun, wenn diese Bedingung NICHT erfüllt ist ? (4 P)

B.) Welche Wirkung hat das „Prinzip der Dynamischen Optimierung" in der Idee des „ Branch & Bound" ? (3 P)

Aufgabe 3: LOP/ Simplex (Aufgabe mit Fleisch)

Je Portion (1 kg)

	Hackbraten	Fleischpflanzerl	Vorräte
Hackfleisch [g]	400	500	50 000 [g]
Eier [Stück]	1	2	100 [Stück]
Lauch [Stangen]	2	0	180 [Stangen]
Gewinn [€]	4.-	3.-	-

Wie viele Portionen Hackbraten und Fleischpflanzerl müssen hergestellt werden, damit die Vorräte höchstens verbraucht werden und der Gesamtgewinn maximal wird?

a.) Stellen Sie das LOP auf und lösen Sie es mit der SIMPLEX-METHODE ! (13 P)

b.) Interpretieren Sie das Ergebnis! (5 P)

c.) Formulieren Sie den Text zur „dualen Problemstellung“, bestimmen Sie deren Lösung („Schattenpreise“) und interpretieren Sie diese! (7 P)

	Hackbraten	Fleischpflan.	Vorräte
Hackfleisch	400	500	50000
Eier	1	2	100
Lauch	2	0	180
G	4€	3€	

Standardform:

$$\max(4x_1 + 3x_2) \rightarrow z - 4x_1 - 3x_2$$

$$400x_1 + 500x_2 \leq 50000 \rightarrow 400x_1 + 500x_2 + x_3 = 50000$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 100 \rightarrow x_1 + 2x_2 + x_4 = 100$$

$$2x_1 \leq 180 \rightarrow 2x_1 + x_5 = 180$$

1. Tabelle

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	rechte Seite
1	−4	−3	0	0	0	0
0	400	500	1	0	0	50000 : 400 = 125
0	1	2	0	1	0	100 : 1 = 100
0	$\boxed{2}$	0	0	0	1	180 : 2 = 90

2. Tabelle

	(1)	1	0	−3	0	0	2	360
	(2)	0	0	500	1	0	−200	14000 : 500 = 28
	(3)	0	0	$\boxed{2}$	0	1	−1/2	10 : 2 = 5
	(4)	0	1	0	0	0	1/2	90 : 0 = 0
pz·(−4)	(5)	0	−4	0	0	0	−2	−360
pz·(400)	(6)	0	400	0	0	0	200	36000
pz·1	(7)	0	1	0	0	0	1/2	90

3. Tabelle

	(1)	1	0	0	0	3/2	1,25	375
	(2)	0	0	0	1	−250	−75	11500
	(3)	0	0	1	0	1/2	−1/4	5
	(4)	0	1	0	0	0	1/2	90
pz·(−3)	(5)	0	0	−3	0	−3/2	+3/4	−15
pz·500	(6)	0	0	500	0	250	−125	2500
pz·0	(7)	0	0	0	0	0	0	0

$\Rightarrow$ optimale Lös.

$z = 375$ €

$x_1 = 90$

$x_2 = 5$

$x_3 = 11500$

opt. duale Lsö.

$y_1 = 0$ € 1g H

$y_2 = 1{,}50$ € 1 Ei

$y_3 = 1{,}25$ € 1 Lauch

Text...

	Hachbraten	Pflanzerl	Vorräte
Hackfleisch	400	500	50000
Eier	1	2	100
Lauch	2	0	180
G	4,-	3,-	

Standardform: Normalform:

$\max(4x_1 + 3x_2) \rightarrow z - 4x_1 - 3x_2$

$400x_1 + 500x_2 \leq 50000 \rightarrow 400x_1 + 500x_2 + x_3 = 50000$

$x_1 + 2x_2 \leq 100 \rightarrow x_1 + 2x_2 + x_4 = 100$

$2x_1 \leq 180 \rightarrow 2x_1 + x_5 = 180$

x_3 = restl. Hackfleisch
x_4 = restl. Eier
x_5 = restl. Lauch

1. Tabelle

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	rechte Seite
f	1	−4	−3	0	0	0	0
g	0	400	500	1	0	0	50 000 : 400 = 125
h	0	1	2	0	1	0	100 : 1 = 100
i	0	$\boxed{2}$	0	0	0	1	180 : 2 = 90

2. Tabelle

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	rechte Seite
f − (5) =	(1)	1	0	−3	0	0	2	360
g − (6)	(2)	0	0	500	1	0	−200	14000 : 500 = 28
h − (7)	(3)	0	0	$\boxed{2}$	0	1	−1/2	10 : 2 = 5
i : $\boxed{2}$ → pz =	(4)	0	1	0	0	0	1/2	90 : 0 = 0
pz · (−4)	(5)	0	−4	0	0	0	−2	−360
pz · 400	(6)	0	400	0	0	0	200	36000
pz · 1	(7)	0	1	0	0	0	1/2	90

3. Tabelle

(1)a − (5)n	(1)	1	0	0	0	1,5	1,25	375
	(2)	0	0	0	1	−250	−75	11500
p : 2	(3)	0	0	1	0	1/2	−1/4	5
	(4)	0	1	0	0	0	+ 1/2	+ 90
pz · (−3)	(5)	0	0	−3	0	−1,5	3/4	−15
pz · 500	(6)	0	0	500	0	250	−125	2500
pz · 0	(7)	0	0	0	0	0	0	0

$\Rightarrow$ optimale Lösung:

$z = 375$ €

$x_1 = 90$

$x_2 = 5$

$x_3 = 11500$ mal Hackfleisch

(da in Zeile eine 1 steht)

$\left.\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ da keine 1 mehr
keine Eier und kein Lauch übrig

Optimale duale Lösung:

$y_1 = 0$ € 1g Hackfleisch

$y_2 = 1{,}5$ € 1 Ei

$y_3 = 5/4$ € 1 Lauch

Mit einem Ei verdient man 1,50€, mit 1 Lauch verdient man 1,25€, mit 1g Hackfleisch verdient man 0,00€.
Es bleiben 11500g Hackfleisch übrig und der Gewinn beträgt 375€

Aufgabe 4 : LOP/ Simplex (vegetarisch – mit Tomaten)

Eine kleine Pizzeria bietet 2 Gerichte an: „Pizza Margherita“ und „Spaghetti mit Tomatensauce“.

Hier die Daten

	Je Portion		
	Pizza	Spaghetti	Vorräte
(Nudel-)Teig [kg]	0,1	0,1	10 [kg]
Tomaten [Stück]	3	5	400 [Stück]
Gewinn [€]	2	3	-

Wie viele Portionen Pizza und Spaghetti muss die Pizzeria herstellen, damit der Gesamtgewinn maximal wird und die Vorräte höchstens verbraucht werden ?

a.) Stellen Sie das LOP auf und lösen Sie es mit der SIMPLEX-METHODE ! (9 P)

b.) Interpretieren Sie das Ergebnis! (4 P)

c.) Formulieren Sie den Text zur „dualen Problemstellung“, bestimmen Sie deren Lösung („Schattenpreise“) und interpretieren Sie diese! (5 P)

b) 250
50
50

	Pizza	Spaghetti	Vorräte
Nudel-Teig	0,1	0,1	10
Tomaten	3	5	400
Gewinn	2€	3€	

a) Standardform

$\max(2x_1 + 3x_2) \rightarrow z - 2x_1 - 3x_2$

$0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 \leq 10 \rightarrow 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + x_3 = 10$

$3x_1 + 5x_2 \leq 400 \rightarrow 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 400$

1. Tabelle:

z	x_1	x_2	x_3	x_4	rechte Seite	
1	−2	−3	0	0	0	
0	0,1	0,1	1	0	10	: 0,1 = 100
0	3	5	0	1	400	: 5 = 80

2. Tabelle:

	(1)	1	−0,2	0	0	3/5	240	
	(2)	0	0,04	0	1	0,02	2	: 0,04 = 50
	(3)	0	3/5	1	0	1/5	80	: 3/5 = 400/3
pz · (−3)	(4)	0	−1,8	−3	0	−3/5	−240	
pz · 0,1	(5)	0	0,06	0,1	0	0,02	8	

3. Tabelle:

	(1)	1	0	0	5	0,7	250
	(2)	0	1	0	25	0,5	50
	(3)	0	0	1	−15	−0,1	50
pz · (−0,2)	(4)	0	−0,2	0	−5	−0,1	−10
pz · 3/5	(5)	0	3/5	0	15	0,3	30

b) optimale Lösung:

$z = 250$ € Gewinn $2 \cdot 50 + 3 \cdot 50$

$x_1 = 50$ Es können 50 Pizzen

$x_2 = 50$ und 50 Por. Spaghetti hergestellt werden

Optimale duale Lösung:

$y_1 = 5$ € Nudel-Teig

$y_2 = 0{,}7$ € Tomaten

Mit einem kg Nudel-Teig verdient man 5€, mit einer Tomate verdient man 0,7 €.

Alle Vorräte sind verbraucht und der Gewinn beträgt 250 €

Aufgabe 5: Problematik des **Branch & Bound**

Jemand muss öfters von Regensburg nach Berlin fahren. Eine direkte Fahrt mit IC ist viel zu teuer.

So hat die Person streckenweise folgende Alternativen.

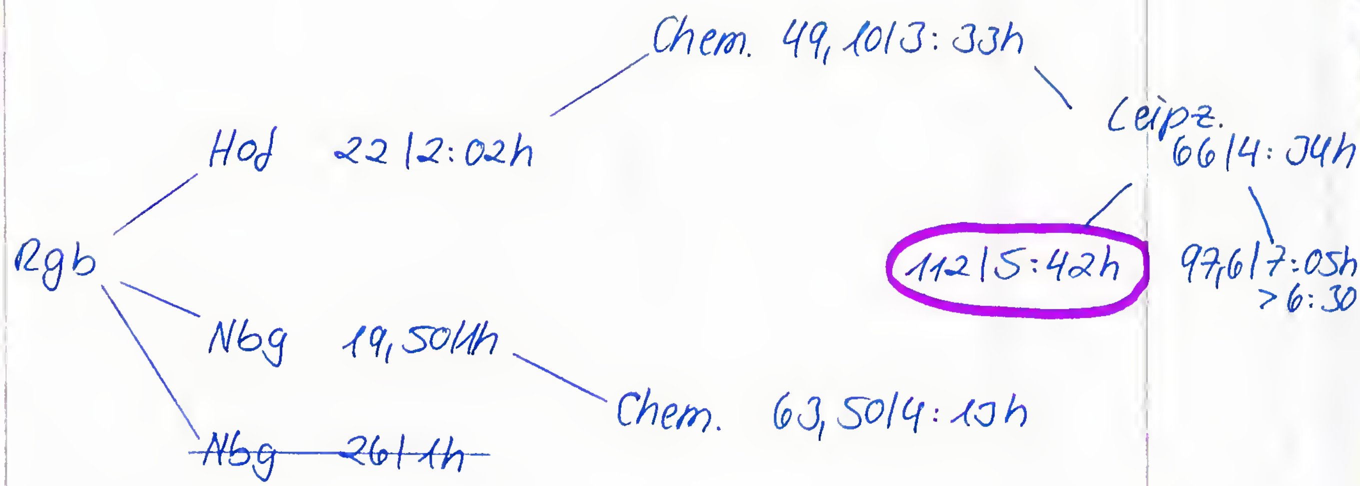
Kante 1	**Kante 2**	**Kante 3**	**Kante 4**
Rgb - >Hof: **22 €/ 2:02 h**	Hof-Chemnitz: **27,10€/1:31**		Leipz.->Ber
		Chem.->Leipz	**46 €/ 1:08 h**
		16,90 €/ 1:01 h	**31,6 €/ 2:31**
Rgb- >Nbg: **19,50 €/ 1 h**	Nbg- > Chem. **44 €/ 3:13**		
26 €/ 1 h			

Bestimme die kostengünstigste Fahrt (mittels B&B und dynamischer Optimierung), die **unter 6:30 h** Fahrzeit bleibt! (14 P)

.

Branch & Bound

Branch & Bound



Kostengünstige Fahrt < 6:30h

Rgb → Hof → Chem → Leipz. → Berlin

Audgabe 5)

Rgb → Hof 22€ | 2:02h Hof – Ch 27,10€ |

Rgb → Nbg 19,50€ | 1h Nbg – Ch 44€ | 3:

26 € | 1h Nbg – Ch 44€ | 3:

kommuli

22 € | 2:02h + 27,10€ | 1:31 49,10

19,50€ | 1h + 44 € | 3:13 63,50

~~26 € | 1h + 44€ | 3:13 70 € |~~

66€ | 4:04h <

→ 80,40€ | 5:14h

→ Rgb → Hof

Man fährt von Rgb. n. Che

und v. Leipzig mit 46 €

1:31

13

13

ert

€ | 3: 33h

| 4: 13h

~~4: 13h~~

Ch-LZ

16,90€ | 1:01h

— L-B

46€ | 1:08h

31,6€ | 2:31h

kommuliert

66€ | 4:34h

16,90€ | 1:01h

80,40€ | 5:14h

46€ | 1:08h

31,6€ | 2:31h

kommuliert

112€ | 5:42h

97,60€ | 7:05h

mnitz über Hof und dann n. Leipzig

Ticket nach Berlin

<u>Aufgabe 6:</u> Problematik der <u>Ganzzahligen</u> Linearen Optimierung

Zeigen Sie an Hand des folgenden Beispiels

$$\text{maximiere } (2x_1 + 5x_2) \qquad \text{oder min}$$

$$\text{mit:} \quad 2x_1 + 8x_2 \leq 31 \qquad \geq$$

$$2x_1 - x_2 \leq 9 \qquad \geq$$

$$\text{und} \quad x_1,\ x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (\text{ also ganzzahlig !})$$

die Problematik der „Ganzzahligen Linearen Optimierung“ auf!

<u>Hinweise:</u>

- Lösen Sie das Problem zuerst (graphisch) im <u>Reellen</u>! (9 P)

- Zeigen Sie danach, dass „Runden“ der reellen optimalen Lösung **nicht** die optimale ganzzahlige Lösung liefert.
  Bestimmen Sie schließlich die <u>optimale ganzzahlige Lösung</u>! (12 P)

ganzz. lin. opt.

Aufgabe 6

$$\max(2x_1 + 5x_2)$$

$$2x_1 + 8x_2 \leq 31$$

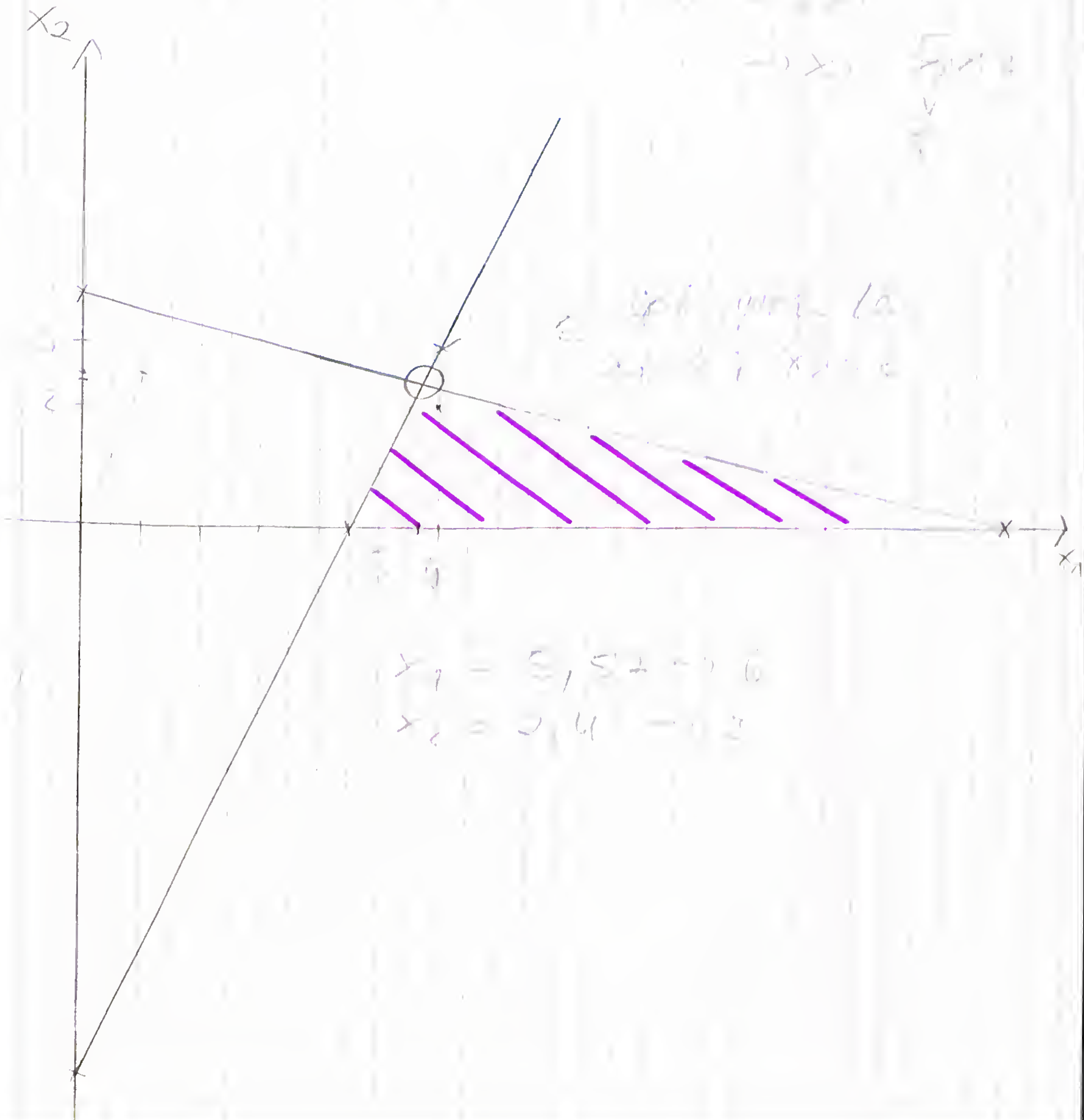
$$2x_1 - x_2 \leq 9$$

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 3{,}88$

$x_2 = 0$; $x_1 = 15{,}5$

$x_1 = 0$; $x_2 = -9$

$x_2 = 0$; $x_1 = 4{,}5$



$$2x_1 + 8x_2 - 31 = 2x_1 - x_2 - 9$$

$$2x_1 - 2x_1 + 8x_2 + x_2 - 31 + 9 = 0$$

$$9x_2 - 22 = 0$$

$$9x_2 = 22$$

$$x_2 = 2{,}44 \mathrel{\widehat{=}} 2$$

$$2x_1 - 2{,}44 - 9 = 0$$

$$2x_1 - 11{,}44 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 = 11{,}44$$

$$x_1 = 5{,}72 \mathrel{\widehat{=}} 5$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 + 8x_2 \leq 31$$

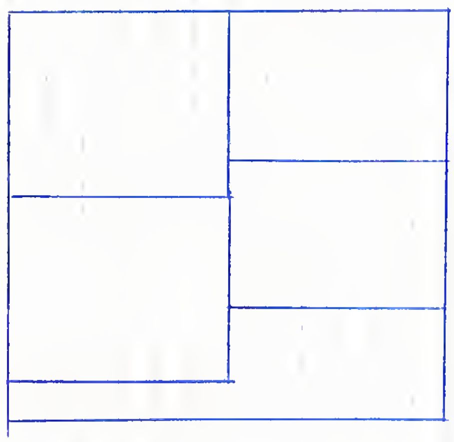
$$2 \cdot 5 + 8 \cdot 2 = 26 \leq 31$$

$$2 \cdot 5 - 2 = 8 \leq 9$$

1,10 m * 1,20 m

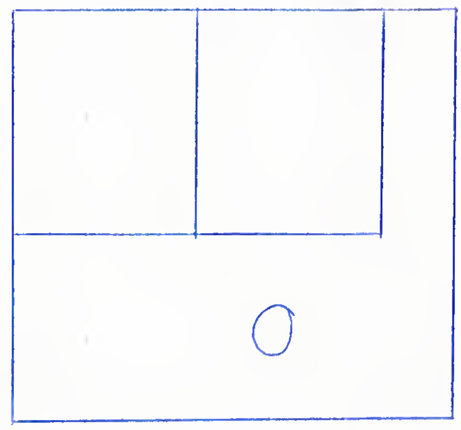
0,50 m * 0,60 m ≙ 40

0,40 m * 0,60 m ≙ 30

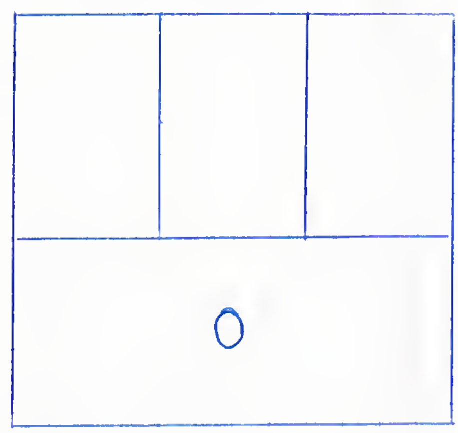


0,5 × 0,6 2x

0,4 × 0,6 2x



0,

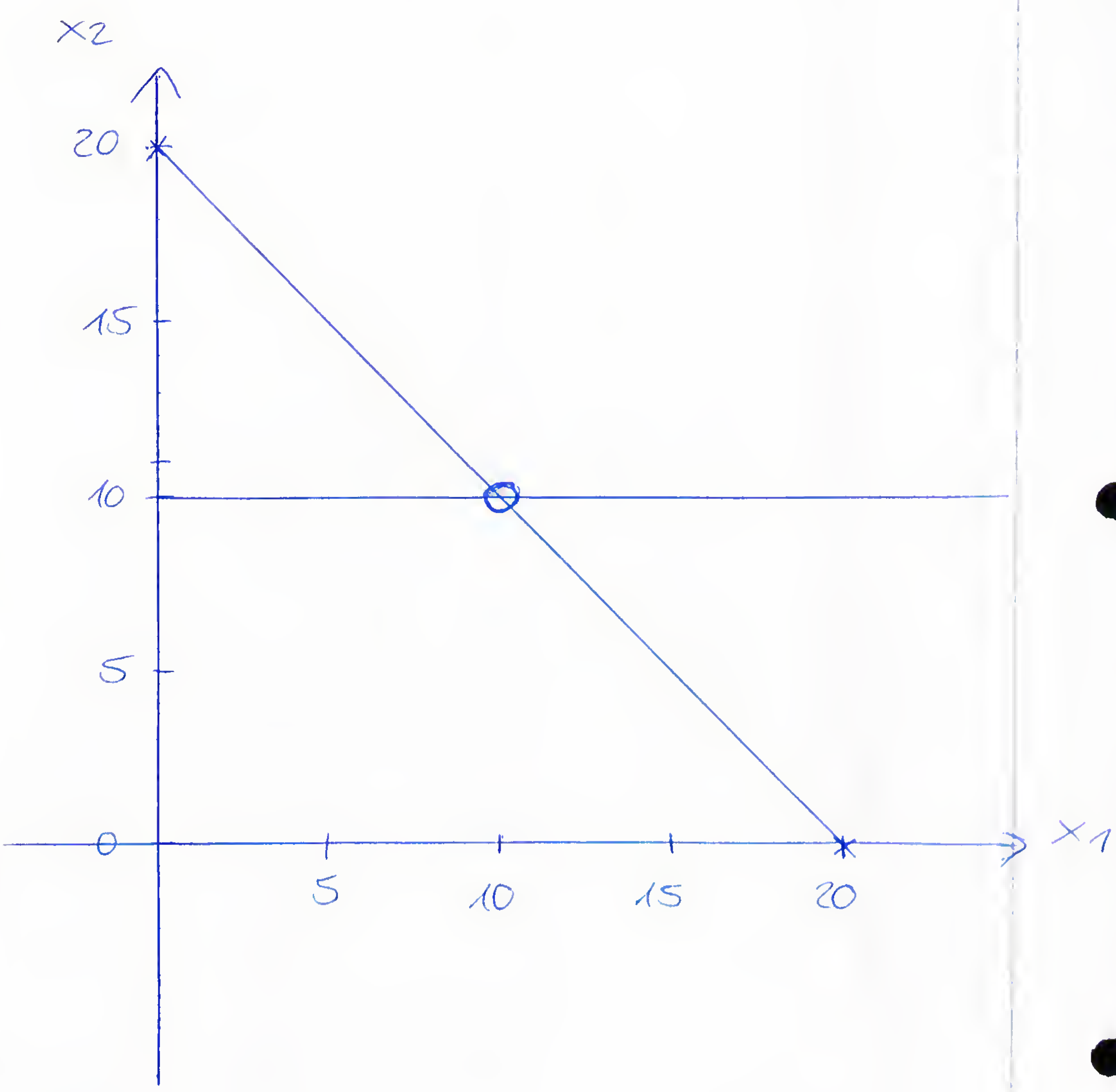


0,4 * 0,6 3x

	Variante x_1	Variante x_2	
0,5×0,6	2	2	40
0,4×0,6	0	3	30

$$2x_1 + 2x_2 \leq 40 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 20; x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 20$$

$$3x_2 \leq 30 \Rightarrow x_2 = 10$$



Aufgabe 7: *Modellbildungen* : **NUR als LOP FORMULIEREN. Nichts rechnen !**

Erklären Sie bei der Formulierung Ihres Modells die inhaltliche Bedeutung der Variablen (und was Schlupfvariable hier inhaltlich bedeuten würden) !

A.) **Vitamine:**

Im Monat benötigt ein Mensch mindestens 600 mg Vitamin B und 300 mg Vitamin H. Um diesen Bedarf durch Medikamente abzudecken, werden zwei verschiedene Sorten A und B angeboten: In einem Gramm der Sorte A sind 30 mg Vitamin B und 10 mg Vitamin H. In Sorte B sind 10 mg Vitamin B und 20 mg Vitamin H enthalten. Sorte A kostet 0,12 € Sorte B 0,08 €.

Wie viel Gramm jeder Sorte muss ein Mensch monatlich zu sich nehmen, um den Bedarf möglichst günstig abzudecken? (7 P)

B.) Teehändler:

Ein Teehändler möchte Teeproben zu je mindestens 10 g zu Werbezwecken verschenken. Dazu will er die Sorte Zitrone-Limette mit schwarzem Tee mischen. Die Sorte Zitrone-Limette kostet im Einkauf 0,6 €/ g und der schwarze Tee kostet 0,3 €/ g. Allerdings möchte er maximal pro Packung 1,50 € ausgeben.

Wieviel schwarzen und wieviel Zitrone-Limette Tee muss er für die Mischung verwenden?

Setze: x = Menge Zitrone-Limette, y = Menge schwarzer Tee (4 P).

X

(A)

	Variante A	Variante B	Mind. B
Vitamin B	30	10	600
Vitamin H	10	20	300
	0,12€	0,08€	

$$\min(0{,}12x_1 + 0{,}08x_2)$$

$$30x_1 + 10x_2 \geq 600$$

$$10x_1 + 20x_2 \geq 300$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

(c)

	Zutat 1	Zutat 2	Zutat 3
Zucker	3	7	20
Aroma	4	8	0
	5€	2€	0,25€

$$\min(0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}0x_3)$$

(A)	Sorte A	Sorte B	MindestB
Vit. B	30	10	600 mg
Vit H	10	20	300 mg
Ka	0,12	0,08	

$$\min(0{,}12 x_1 + 0{,}08 x_2)$$

$$30 x_1 + 10 x_2 \geq 600$$

$$10 x_1 + 20 x_2 \geq 300$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$\rightarrow$

92 P.

2x Simplex

1x graf. LOP

[kariertes Papier]

1x Branch & Bound

2x Modellierung

1x Fragen

B) [illegible] [illegible]

c)

	Zutat 1	Zutat 2	Zutat 3
Zucker	3	7	20
Aromastoff	4	8	0
	5,-	2,-	0,25,-

$$\min\,(0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}3x_3)$$

$$(x_1 + x_2 + x_3) \cdot 100$$

$$3 \leq y_1 \leq 6$$

$$y_2 \geq 3$$

(A)	Sorte A	Sorte B	Mindest B
Vit. B	30	10	600 mg
Vit H	10	20	300 mg
Ka	0,12	0,08	

$$\min(0{,}12x_1 + 0{,}08x_2)$$

$$30x_1 + 10x_2 \geq 600$$

$$10x_1 + 20x_2 \geq 300$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

$\rightarrow$

92P.

2x Simplex

1x graf. LOP

[karriertes Papier]

1x Branch & Bound

2x Modellierung

1x Fragen

B) [illegible] [illegible]

c)

	Zutat 1	Zutat 2	Zutat 3
Zucker	3	7	20
Aromastoff	4	8	0
	5,–	2,–	0,25,–

$$\min (0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}3x_3)$$

$$(x_1 + x_2 + x_3) \cdot 100$$

$$3 \leq y_1 \leq 6$$

$$y_2 \geq 3$$

C.) Softdrinks

Eine große Firma für Softdrinks möchte ein neues Produkt auf den Markt bringen.

Das neue Getränk soll aus drei flüssigen Zutaten zusammengemischt werden, wobei die erste Zutat 5 Euro pro Liter, die zweite Zutat 2 Euro pro Liter und die dritte Zutat 0,25 Euro pro Liter kostet.

Zutat 1 enthält außerdem 3g/ l Zucker und 4 Einheiten/ l eines Aromastoffes, während die zweite Zutat 7g/ l Zucker und 8 Einheiten/l des Aromastoffes und die dritte Zutat 20g/ l Zucker und keinen Aromastoff enthält.

Aus produktionstechnischen Gründen müssen pro Produktionsvorgang mindestens 100 Liter des Getränks hergestellt werden.

Die Marktforschung hat ergeben, dass das Getränk von der Zielgruppe angenommen wird, falls sich die Parameter in folgenden Intervallen bewegen.
Das fertige Getränk soll mindestens 3g/ l und höchstens 6g/ l Zucker enthalten.
In einem Liter des Getränks sollen sich mindestens 3 Einheiten des Aromastoffes befinden. Außerdem soll das Getränk zu mindestens 40% aus Zutat 1 bestehen, während Zutat 2 höchstens 50% und Zutat 3 höchstens 30% des neuen Getränks ausmachen darf. (14 P)

HOCHSCHULE REGENSBURG

PRÜFUNGSTEILNEHMER
(bitte in Druckbuchstaben)

Prüfungsfach: **LO**

Name: **Sem.:**

Aufgabensteller: Prof. Dr. Hornung

Vorname:

Prüfungstermin: 12.07 2010

Arbeitszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel: alles

Viel Erfolg !

Aufgabe 1: Lineare Optimierung (grafisch lösen !)

Man will aus köstlichen Zutaten zwei vegetarische orientalische Zwischen-Mahlzeiten herstellen und gewinnmaximal verkaufen.

	Pro Portion		
	Rohgemüse-Salat	Auberginen-Salat	Vorräte
Auberginen	1	3	9 [Stück]
Tomaten	2	1	9 „
Paprika-Schoten	1	1	5 „
Gewinn (€)	2.-	4.-	

Bestimmen Sie **grafisch** die gewinnoptimale Lösung dieses LOP und **interpretieren** Sie das Ergebnis ! (11 P)

Aufgabe 2 :

Lineare Optimierung / grafische Lösung und nachträgliche Änderung

a.) Lösen Sie folgendes LOP **grafisch (7 P)**

Produkte / Rohstoffe	- je - P_1	P_2	Vorräte
R_1	250	500	2000
R_2	300	150	1500
Gewinn (€)	3.-	2.-	

b.) Interpretieren Sie das Ergebnis (2 P)

c.) Was geschieht, wenn die Vorräte von R_2 statt bisher 1500 Mengeneinheiten nun auf 1950 Mengeneinheiten steigen (6 P)

Aufgabe 3 : Lineare Optimierung mittels SIMPLEX-METHODE

SAID will zwei Prachtsterne orientalischer süßer Nachspeisen produzieren
- **BAKLAWA** und **LEKACH** (= israelischer Rührkuchen)

Die folgende Tabelle zeigt die wichtigsten Zutaten und Details:

	Pro Portion		
	Baklawa	Lekach	Vorräte
Zucker	20	40	400 [g]
Mandeln/ Walnüsse	50	0	500 "
Zimt	5	5	60 "
Gewinn (€)	2.-	3.-	

Berechnen Sie mittels **Simplexmethode** die optimale Lösung und interpretieren Sie diese ! **(21 P)**

Aufgabe 3

	Dahlawa	Lekach	Vorräte
Zucker	20	40	400
Mandeln	50	0	500
Zimt	5	5	60
G	2€	3€	

Standardform → Normalform

$\max(2x_1 + 3x_2) \rightarrow z - 2x_1 - 3x_2$

$20x_1 + 40x_2 \leq 400 \rightarrow 20x_1 + 40x_2 + x_3 = 400$

$50x_1 \leq 500 \rightarrow 50x_1 + x_4 = 500$

$5x_1 + 5x_2 \leq 60 \rightarrow 5x_1 + 5x_2 + x_5 = 60$

1. Tabelle

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	rechte Seite
(1)	1	−2	−3	0	0	0	0
(2)	0	20	$\boxed{40}$	1	0	0	400 : 40 = 10
(3)	0	50	0	0	1	0	500 : 0
(4)	0	5	5	0	0	1	60 : 5 = 12

2. Tabelle

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	rechte Seite
	(1)	1	−1/2	0	3/40	0	0	30
	(2)	0	1/2	1	1/40	0	0	10 : 1/2 = 20
	(3)	0	50	0	0	1	0	500 : 50 = 10
	(4)	0	$\boxed{2,5}$	0	−5/40	0	1	10 : 2,5 = 4
pz. (−3)	(5)	~~0~~	~~−1,5~~	~~−3~~	~~−3/40~~	~~0~~	~~0~~	~~−30~~
pz. 0	(6)	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
pz. 5	(7)	~~0~~	~~5/2~~	~~5~~	~~5/40~~	~~0~~	~~0~~	~~50~~

3. Tabelle

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	rechte Seite
	(1)	1	0	0	0,05	0	0,2	32
	(2)	0	0	1	0,05	0	−0,2	8
	(3)	0	0	0	2,5	1	−20	300
	(4)	0	1	0	−0,05	0	0,4	4
pz. (−1/2)	(5)	0	−1/2	0	0,025	0	−0,2	−2
pz. 1/2	(6)	0	1/2	0	−0,025	0	0,2	2
pz. 50	(7)	0	50	0	−2,5	0	20	200

$(x_1 = 4)$ $\qquad z = 32$ €

$x_2 = 8$ Portionen Lekach

$x_3 = 0$ kein Zucker übrig

$x_4 = 300$ 300 Mandeln sind übrig

$x_5 = 0$ kein Zimt übrig

$x_1 = 4$ Portionen Baklawa

Aufgabe 4: Verschnittoptimierung
In einem Sägewerk soll man aus 5 m und 7 m langem Rundholz Längen von 1,5 m bzw. 2 m herstellen !

a.) Stellen Sie alle sinnvollen Schnittvarianten auf und formulieren Sie das mathematische MODELL, dass möglichst wenige 5 m und 7 m Rundhölzer gebraucht werden und die Nachfrage nach 200 Stück 1,5 m Holz und 100 Stück 2 m Holz erfüllt ist ! (16 P)

für beide aufstellen
und alle mit 1,5 m zusammen
und die mit 2m "

b.) Was muss man beim MODELL noch ändern, wenn nur insgesamt 50 Rundhölzer der Länge 5 m vorfügbar sind, bei den 7 m beliebig viele ? (3 P)

$x_5 + x_6 + x_7 \leq 50$

Aufgabe 5 : Problematik der **<u>Ganzzahligen</u>** Linearen Optimierung

Betrachten Sie folgendes Beispiels

maximiere ($4 x_1 + 3 x_2$)

mit: $2 x_1 - 3 x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 \leq 4{,}5$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

a.) Finden Sie die optimale Lösung in folgenden Fällen (Hinweise: <u>Grafisch</u> lösen und <u>zusätzliche Berechnungen</u> und Überlegungen !) (16 P)

I.) x_1 und x_2 reelle Zahlen

II.) $x_1, x_2 \in N \cup \{ 0 \}$ (also ganzzahlig !)

$I.\quad 2x_1 - 3x_2 \leq 6$

$II.\quad x_1 + x_2 \leq 4{,}5 \quad | \cdot 2$

$II_n.\quad 2x_1 + 2x_2 \leq 9$

$\Rightarrow I - II_n = -5x_2 \leq -3 \Rightarrow x_2 \geq 3/5$

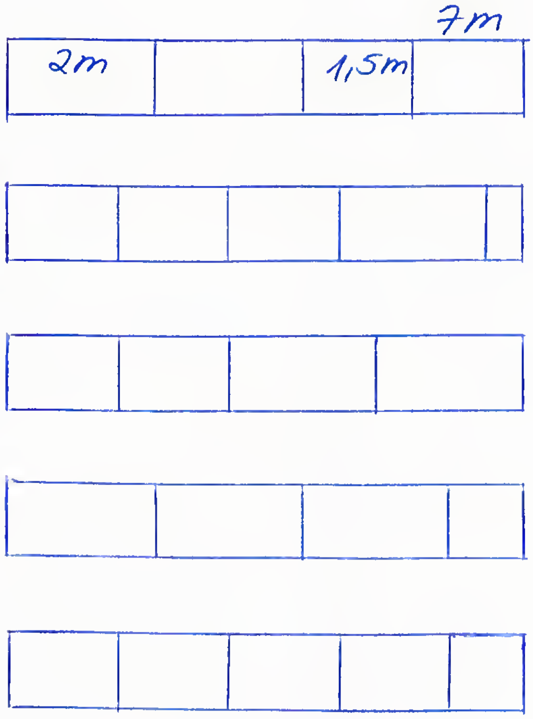
$\Rightarrow x_1 + 3/5 \leq 4{,}5 \Rightarrow x_1 \leq 3{,}9$

b.) Welche **zwei** wichtigen Kriterien verletzt man oft, wenn man reelle optimale Lösungsvariable einfach nur ganzzahlig rundet, in der Hoffnung , dann auch die ganzzahligen optimalen Lösungsvariablen zu erhalten ? (3 P)

Modellierung / Verschnittopt. Aufgabe 4

Geg: Beliebige Anzahl von 7m

gewünscht v. Kunden: 2m u. 1,5m Stücke



2m × 2
1,5m × 2

1,5m × 3
2m × 1

1,5m × 2
2m × 2

2m × 3
1,5m × 0

1,5m × 4
2m × 0

	Variante x_1	Variante x_2	Variante x_3	Variante x_4	K St
2m	0	3	2	1	100
1,5m	4	0	2	3	200
Abfall / Verschnitt	1	1	0	0,5	

NBD:
$$3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 100$$
$$4x_1 + 2x_3 + 3x_4 \geq 200$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

≙ KW = Kundenwunsch

Aufgabe 5 : Problematik der **Ganzzahligen** Linearen Optimierung

Betrachten Sie folgendes Beispiels

$$\text{maximiere } (4x_1 + 3x_2)$$

mit: $2x_1 - 3x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 \leq 4{,}5$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

a.) Finden Sie die optimale Lösung in folgenden Fällen (Hinweise: Grafisch lösen und zusätzliche Berechnungen und Überlegungen !) (16 P)

I.) x_1 und x_2 reelle Zahlen

II.) $x_1, x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (also ganzzahlig !)

I. $2x_1 - 3x_2 \leq 6$

II. $x_1 + x_2 \leq 4{,}5 \quad | \cdot 2$

$II_n.\ 2x_1 + 2x_2 \leq 9$

$\Rightarrow I - II_n = -5x_2 \leq -3 \Rightarrow x_2 \geq 3/5$

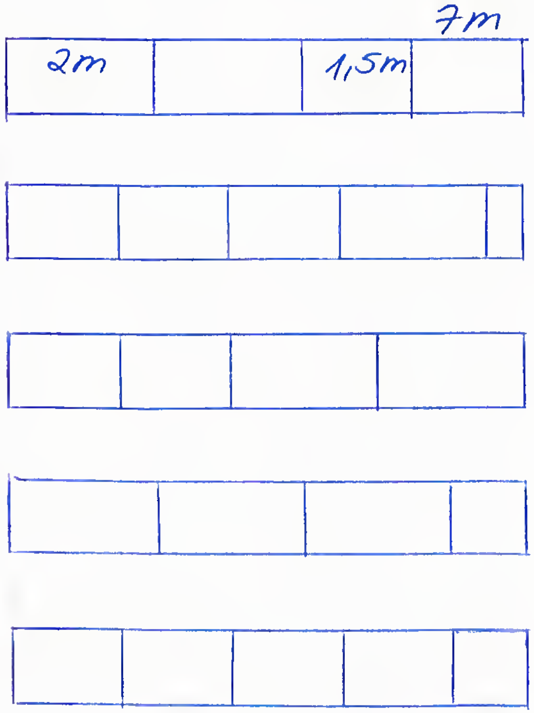
$\Rightarrow x_1 + 3/5 \leq 4{,}5 \Rightarrow x_1 \leq 3{,}9$

b.) Welche **zwei** wichtigen Kriterien verletzt man oft, wenn man reelle optimale Lösungsvariable einfach nur ganzzahlig rundet, in der Hoffnung , dann auch die ganzzahligen optimalen Lösungsvariablen zu erhalten ? (3 P)

Modellierung / Verschnittopt. Aufgabe 4

Geg: Beliebige Anzahl von 7m

gewünscht v. Kunden: 2m u. 1,5m Stücke



2m × 2
1,5m × 2

1,5m × 3
2m × 1

1,5m × 2
2m × 2

2m × 3
1,5m × 0

1,5m × 4
2m × 0

	Variante x_1	Variante x_2	Variante x_3	Variante x_4	KW Stück
2m	0	3	2	1	100
1,5m	4	0	2	3	200
Abfall / Verschnitt	1	1	0	0,5	

NBD: $3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 100$

$4x_1 + 2x_3 + 3x_4 \geq 200$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

≙ KW = Kundenwunsch

Zielfunktion:

Verbrauchsminimal: $\min(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

Verschnittminimal: $\min(x_1 + x_2 + 0{,}5x_4)$

Aufgabe 6 : Problematik des **Branch & Bound**

Jemand möchte von A über mehrere Stationen nach B mit dem Zug fahren.
Das Ganze soll möglichst billig von statten gehen, aber auch innerhalb einer gegeben Zeit von maximal 3 Stunden und 15 Minuten.

Die folgende Skizze erläutert die Situation:

A B

O---------O---------O---------------O

Kante 1 Kante 2 Kante 3

Es gibt folgende Alternativen je Kante

	Kante 1: Kosten/ Fahrzeit	Kante 2: Kosten/ Fahrzeit	Kante 3: Kosten/ Fahrzeit
IC:	56.-€ / 60 Min.	66.-€ / 70 Min.	47.-€/ 50 Min.
RE:	50.-€ / 65 Min.	60.-€ / 77 Min.	35.-€/ 70 Min.

Bestimmen Sie die kostenminimale Lösung unter der Beachtung, dass die Gesamtfahrzeit höchsten 3 Stunden und 15 Minuten betragen darf ! (15 P)

Aufgabe 6

IC 56 | 60Min

IC 66 | 70Min
RE 60 | 77 Min

kommuliert
122€ | 130Min
116€ | 137 Min

IC 47 | 50 Min
~~RE 35 | 70 Min~~
IC 47 | 50min
~~RE 35 | 70Min~~

kom
169€ | 180 Min
~~157€ | 200 Min~~
~~163€ | 187 Min~~
~~151€ | 207 Min~~

Re 50 | 65 min

IC 66 | 70Min
RE 60 | 77Min

116€ | 135 Min
110€ | 142 Min

IC 47 | 50Min
~~RE 35 | 70Min~~
IC 47 | 50 Min
RE 35 | 70 Min

160€ | 185 Min
~~151€ | 205 Min~~
157€ | 192 Min
~~157€ | 1?? Min~~
~~145€ | 212 Min~~

⇒ Die kostengünstigste Variante ist:
RE → RE → IC
er zahlt 157 € und fährt 3:12h

Aufgabe 5)

Kante 1	Kante 2	Kante 3	Kante 4
22€ / 2:02h	27.10€ / 1:31 ~~44€ / 3:~~		
19.50€ / 1h	44€ / 3:13		
26€ / 1h			

kommuliert

22€ / 2:02h – 27.10€ / 1:01h 49,10 / 3:33

19,50€ / 1h – 44€ / 3:13h 63,50 / 4:13

16,90€ / 1:01h

66€ / 4:24

80,40 / 5:14

~~26€ / 1h – 44€ / 3:13h 70 / 4:13~~

IC 56 / 1h

RE 50 / 1:05h

SIMPLEX - METHODE

Ein Kaffeehersteller besitzt zwei Sorten Kaffee. Den teuren Superior – Kaffee kann er für 1000€/t verkaufen, während der günstige Inferior – Kaffee nur 700€/t einbringt.

Die beiden Sorten werden auf zwei getrennten Plantagen angebaut. Plantage Superior bringt maximal 400t und die Plantage Inferior 600t Kaffee.

Beide Sorten werden in der gleichen Rösterei verarbeitet, die jedoch nur ein Fassungsvermögen von 850t aufweist.

Prof. Dr. Roland Hornung 17. Oktober 2013

1. Übungsblatt zu LOP

Aufgabe 1:

Warum liegt in einem LOP das Minimum oder Maximum am Rande des Definitions-Bereiches ?

optimale Lösungen im zuverlässigen Bereich

Aufgabe 2:

Was heißt „konvexes Gebiet" ?

heißt konvex, falls mit $\vec{x} \in G, \vec{y} \in G$ folgt

$\lambda \vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in G, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

konvex

nicht konvex

Aufgabe 3:

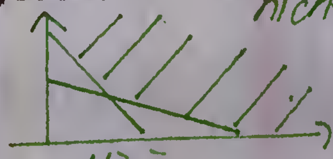
a.) Warum ist im primären Standard - LOP der zulässige Bereich immer ein Polyeder (Vieleck) ? da es min. 2 Bedingungen (NBD) gibt

b.) Warum ist dieses Polyeder ein **konvexes** Polyeder ?

konvex

Maximum

nicht konvex



Minimum

Aufgabe 4:

	je Portion		
	Obstsalat	Obstkuchen	Vorräte
Bananen	1	1	7 Stück
Pfirsiche	2	4	20 Stück
Birnen	3	1	18 Stück
Gewinn (€)	1,50 -	2.-	/

Graphische Lösung und Interpretation !

Aufgabe 4) $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

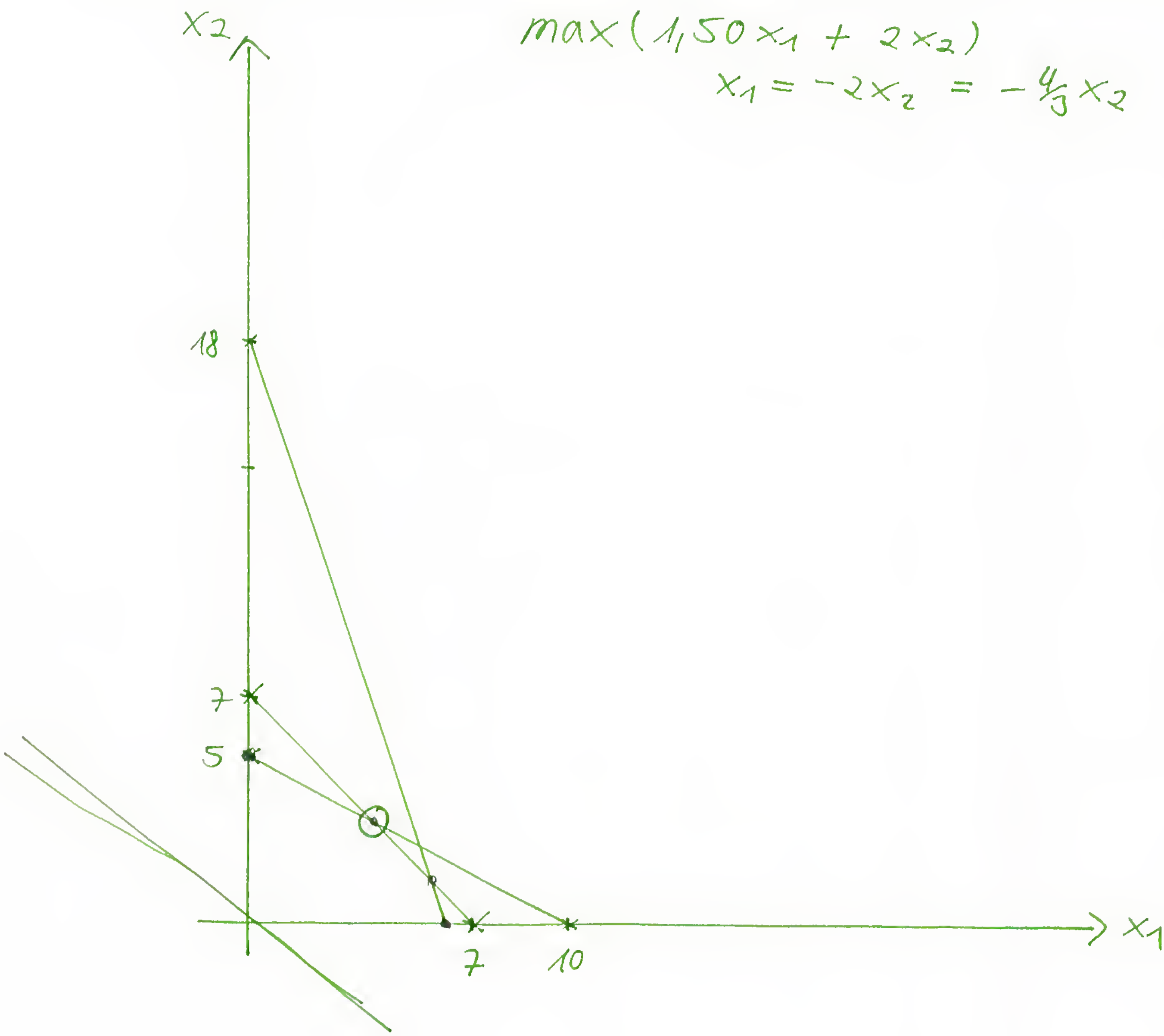
$x_1 + x_2 \leq 7 \longrightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 7$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 7$

$2x_1 + 4x_2 \leq 20 \longrightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 10$

$3x_1 + x_2 \leq 18 \longrightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 18$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$

$\max(1{,}50x_1 + 2x_2)$

$x_1 = -2x_2 = -\frac{4}{3}x_2$

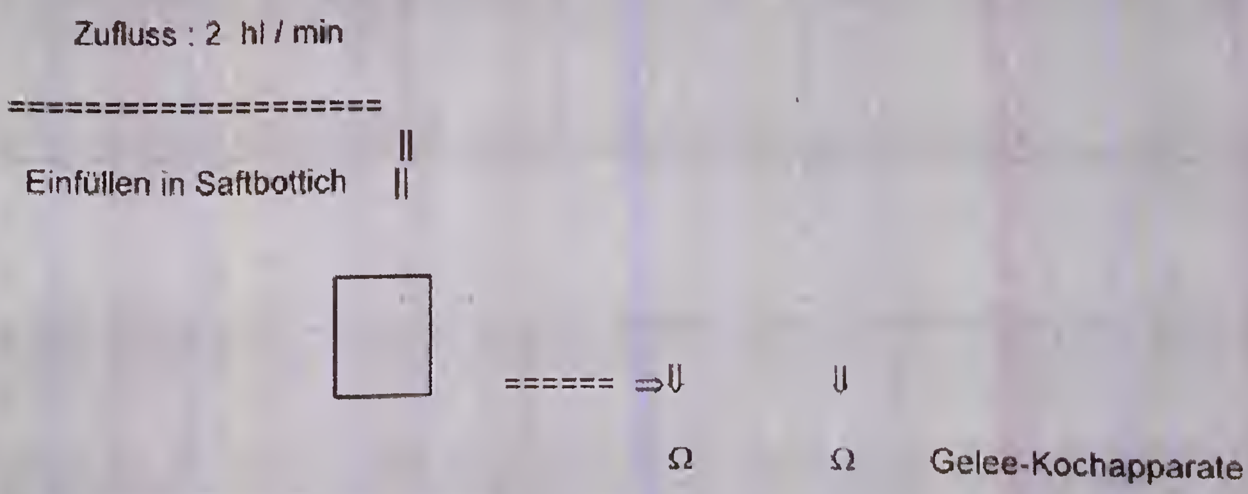


Prof. Dr. Hornung 29. Oktober 2013

2. Übungsblatt LOP

Aufgabe : Lineare Optimierung / Praktisches Beispiel :

Gelee-Herstellung aus gepresstem Obst-Saft



Mit einem kontinuierlichen (nicht zu stoppenden) Zufluss von 2 hl / min. wird ein Saft-Bottich mit frisch gepresstem Obstsaft gefüllt .

Der maximale Füllstand ist 100 hl, der momentane Füllstand ist 40 hl.

Die beiden Gelee-Kochapparate können aus dem Bottich mit jeweils 50 hl Obstsaft in vernachlässigbar kurzer Zeit gefüllt werden.
Der Gelee-Kochprozess je Apparat dauert 40 Minuten !

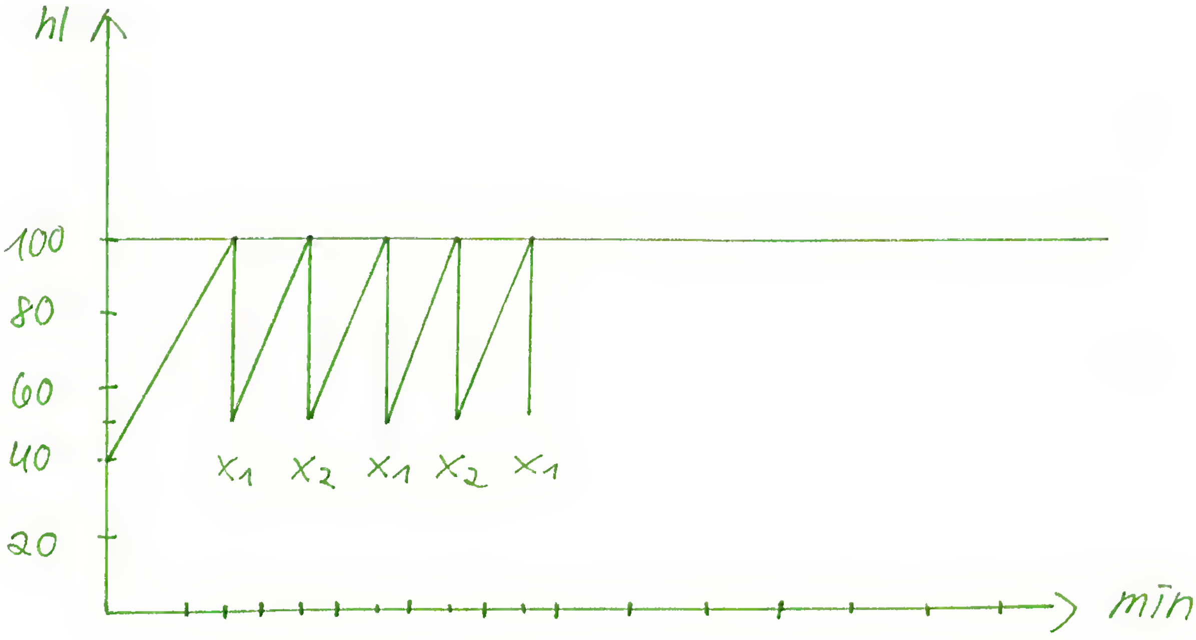
a.) Berechnen Sie (mit graphischer linearer Optimierung) den spätest möglichen Koch-(und Füll-) Beginn jedes der beiden Kochapparate !

(Hinweis: Wählen Sie $x1$ als Zeitdauer bis zum Beginn 1. Apparates, $x2$ als Dauer bis zum Start des 2. Apparates , jeweils von jetzt an , gerechnet !
Jetzt sei Zeitpunkt Null ! Maximieren Sie die Summe dieser beiden Zeiten !)

b.) Geht der Prozess kontinuierlich in dieser Weise weiter ?

D.h., ist ein Geleekocher immer frei, um befüllt zu werden, bevor der Saftbottich überläuft ?

Ab welcher Gelee-Kochdauer würde der Saftbottich überlaufen ?)

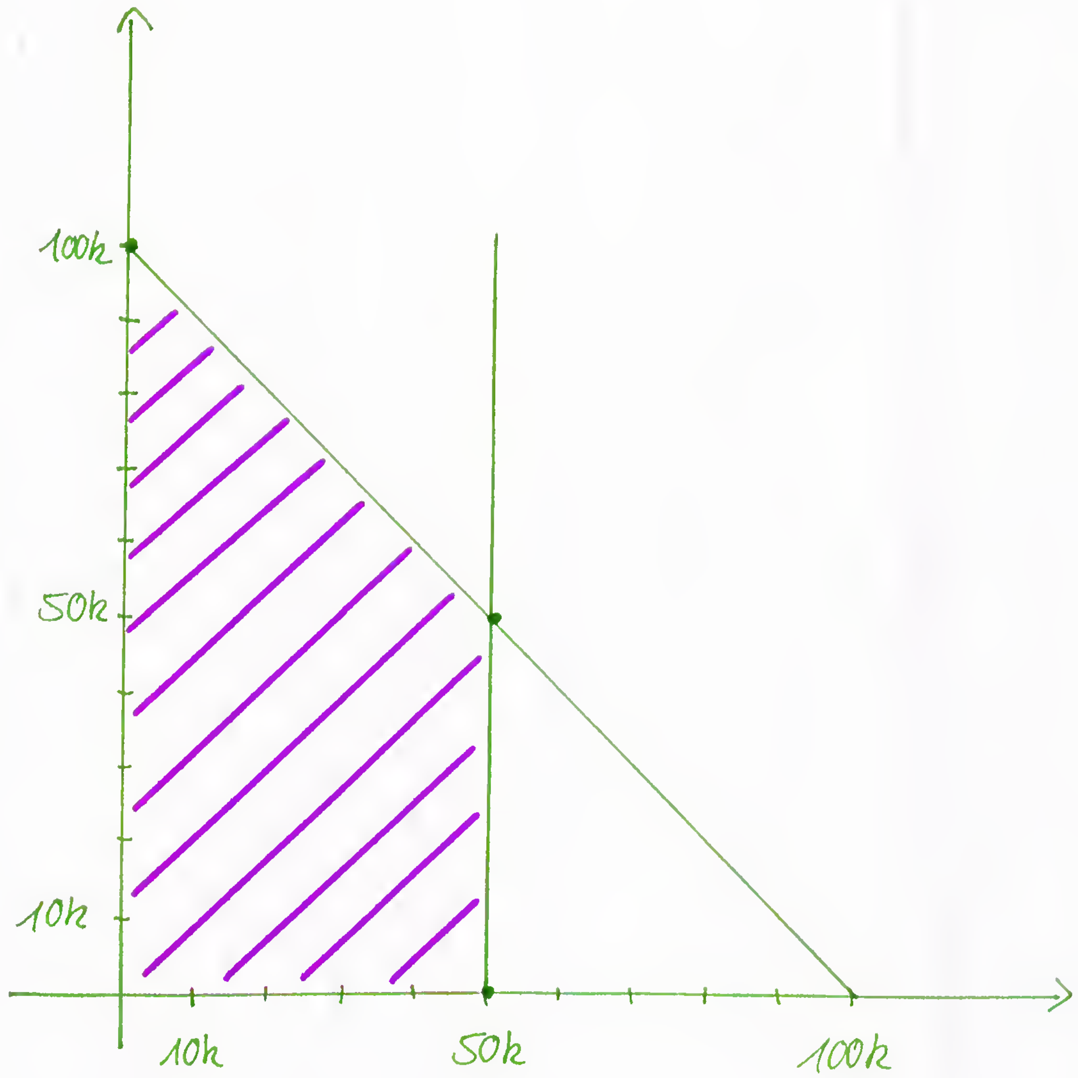

hl
100
80
60
40
20
x1 x2 x1 x2 x1
min

Übungsblatt 3

$$x_1 + x_2 \le 100.000$$

$$0.2\,x_1 \le 10.000$$

$$\max(2x_1 + 1{,}1x_2) \qquad x_1, x_2 \ge 0$$



~~$x_1 = 50.000$~~

$x_1 = 50.000$ u. $x_2 = 50.000$

$x_2 = 100.000$

$\rightarrow \quad 2 \cdot 50.000 + 1.1 \cdot 50.000 = 155.000$

$\rightarrow \quad 2 \cdot 0 + 1{,}1 \cdot 100.000 = 110.000$

c) 50.000 in 1) und 50.000 in 2)

Prf.Dr.Hornung

3. Übungsblatt LOP

Kapital – Anlagen

Jemand hat 100.000€ geerbt und möchte diese möglichst gewinnmaximal - bei begrenzten Risiko – anlegen.

Zwei Anlageformen stehen zur Wahl

1) Global Lange Tech Index (mit CAP)
   Gewinnerwartung: binnen 2 Jahre: Verdopplung des Einsatzes
   Verlustbegrenzung ("ge-capt"): maximal 20% des Einsatzes

2) Bundes – Schatzbriefe:
   Gewinnerwartung: binnen 2 Jahre: 10% des Einsatzes
   Verlust: keiner, da festverzinslich und Restlaufzeit 2 Jahre

Frage:

Wie soll er die 100.000€ anlegen, damit die Gesamt – Gewinnerwartung nach 2 Jahren möglichst groß ist und der (mögliche) Verlust auf 10.000€ begrenzt ist [d.h. wie viel unter 1) , und wie viel unter 2) anlegen]?

a) Stellen Sie das zugehörige Lineare Optimierungsproblem auf!
b) Lösen Sie das Problem grafisch!
c) Interpretieren Sie das Ergebnis!

Prof.Dr.Hornung

4. Übungsblatt LOP

Lineare Optimierung und SIMPLEX – METHODE

Jemand stellt Obstsalat und Obstkuchen (aus Fertigboden aus Bisquit) her.

Die einzelnen weiteren wichtigen Zutaten sind in folgender Tabelle aufgelistet:

Je Portion

	Obstsalat	Obstkuchen	
Bananen	1	1	7Stück
Pfirsiche	2	4	20Stück
Birnen	3	1	18Stück
Gewinn(€)	1.50	2,00	

LÖSE und INTERPRETIERE obiges Problem mit der SIMPLEX – Methode!

5. Übungsblatt LOP

Verschnittminimierung

In einem Sägewerk soll man aus 5 m langem Rundholz Teil- Längen von 1,5 m und 2 m schneiden .nach folgendem Schnittplan:

	Variante 1	Variante 2	Aufträge
1,5 m	2	-	180
2 m	1	2	120
Abfall (m)	0	1	

a.) Bestimmen Sie die verschnittminimale und die bestellminimale Lösung graphisch !

b.) Welche Lösung ha geringere Gesamtkosten, wenn jedes benötigte 5 m Rohr in der Beschaffung 100 Euro kostet , aber die Lagerhaltung von Überproduk - tion je Rohr 5 Euro, und die Lagerung und Entsorgung jeden m Abfalls 10 Euro ?

c.) Wie teuer darf die Entsorgung je m Abfall werden, bis die verschnittminimale Lösung billiger wird (alle übrigen Größen bleiben gleich) ? (2 P)

d) Es fehlt im Schnittplan eine weitere (sinnvolle) Schnitt-Variante ! Wie lautet sie? Ersetzen Sie oben im Schnittplan geeignet eine der gegebenen Varianten und finden Sie eine bessere Lösung (verschnittminimal und bestellminimal !) (7 P)

Prof. Dr. Hornung 07 Dezember 2013

7. Übungsblatt LOP

Aufgabe 5 : Problematik der <u>Ganzzahligen</u> Linearen Optimierung

Betrachten Sie folgendes Beispiels

$$\text{maximiere } (4x_1 + 3x_2)$$

$$\text{mit: } 2x_1 - 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 4{,}5$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

a.) Finden Sie die optimale Lösung in folgenden Fällen (Hinweise: <u>Grafisch</u> lösen und <u>zusätzliche Berechnungen</u> und Überlegungen !)

I.) x_1 und x_2 reelle Zahlen

II.) $x_1, x_2 \in N \cup \{0\}$ (also ganzzahlig !)

b.) Welche **zwei** wichtigen Kriterien verletzt man oft, wenn man reelle optimale Lösungsvariable einfach nur ganzzahlig rundet, in der Hoffnung , dann auch die ganzzahligen optimalen Lösungsvariablen zu erhalten ?

Audgabe 5)

Rgb → Hof 22€ | 2:02h Hof – Ch 27,10€ | 1:31

Rgb → Nbg 19,50€ | 1h Nbg – Ch 44€ | 3:13

26€ | 1h Nbg – Ch 44€ | 3:13

Ch – LZ 16,90€ | 1:01h — L – B 46€ | 1:08h / 31,6€ | 2:31h

22€ | 2:02h + 27,10€ | 1:31 kommuliert 49,10€ | 3:33h

19,50€ | 1h + 44€ | 3:13 63,50 | 4:13h

~~26€ | 1h + 44€ | 3:13 70€ | 4:13h~~

16,90€ | 1:01h

kommuliert 66€ | 4:34h

80,40€ | 5:14h

66€ | 4:34h < 46€ | 1:08h / 31,6€ | 2:31h

kommuliert 112€ | 5:42h

97,60€ | 7:05h

→ 80,40€ | 5:14h

→ Rgb → Hof

Man fährt von Rgb. n. Chemnitz über Hof und dann n. Leipzig und v. Leipzig mit 46€ Ticket nach Berlin